ULTERIORI ESERCIZI SULLA TEORIA DELLA MISURA

A. Figà Talamanca

18 ottobre 2006

Esercizio 1 *Dimostrare che se* E_n *è una successione decrescente di insiemi misurabili, cioè* $E_{n+1} \subset E_n$, *e* E_1 *ha misura finita, allora* $m(\bigcap_n En) = \lim_n m(E_n)$. *Mostrare con un esempio che l'enunciato può essere falso quando* $m(E_1) = \infty$.

Esercizio 2 *Dimostrare che un insieme* E *è misurabile se e solo se, per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un insieme aperto* U *tale che* $E \subset U$ *e* $m(U \setminus E) < \varepsilon$.

Esercizio 3 *Sia* K *l'insieme ternario di Cantor. Sia* $x(t)$ *la funzione così definita su* K *e a valori in* $[0, 1]$:

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{2^j},$$

se $\{\xi_j\}$ *è la successione a valori in* $\{0, 1\}$ *tale che*

$$t = 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_j}{3^j}.$$

Dimostrare che la funzione $x(t)$ *assume valori uguali agli estremi degli intervalli aperti e disgiunti la cui unione è il complemento dell'insieme di Cantor.*

Esercizio 4 *Estendere la funzione* $x(t)$ *dell'esercizio precedente ad una funzione* $u(t)$ *continua sull'intervallo* $[0, 1]$, *derivabile e con derivata zero sul complemento dell'insieme di Cantor. (Questa funzione, che è costante su ognuno degli intervalli aperti che "compongono" il complemento dell'insieme di Cantor, si chiama funzione di Cantor o funzione di Cantor Vitali).*

Esercizio 5 *Sia* $u(t)$ *la funzione definita nel precedente esercizio e*

$$v(t) = \frac{u(t) + t}{2}.$$

Dimostrare che $v(t)$ *è una funzione crescente, continua, cioè un omeomorfismo di* $[0, 1]$ *in sé che trasforma un insieme misurabile in un insieme non misurabile.*

Esercizio 6 *Dimostrare che ogni omomorfismo di* $[0, 1]$ *su* $[0, 1]$ *manda un insieme di Borel in un insieme di Borel. Dedurne che esistono insiemi misurabili che non sono insiemi di Borel.*

Esercizio 7 *Dimostrare che per una funzione f definita su $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ le seguenti condizioni sono equivalenti:*

i) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) > \alpha\}$ è misurabile.

ii) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \geq \alpha\}$ è misurabile.

iii) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) < \alpha\}$ è misurabile.

iv) per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\}$ è misurabile.

DEFINIZIONE 1. *Una funzione f definita su $\mathbb{R}$, o su un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}$ e a valori in $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ si dice misurabile se soddisfa ad una delle (e quindi a tutte le) condizioni indicate nel precedente esercizio.*

Esercizio 8 *Dimostrare che la somma e il prodotto, punto per punto, di funzioni misurabili a valori in $\mathbb{R}$ sono misurabili. Osservare che le funzioni continue sono misurabili.*

Esercizio 9 *Dimostrare che un insieme è misurabile se e solo se la sua funzione caratteristica è misurabile.*

Esercizio 10 *Dimostrare che se f è misurabile allora per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ è misurabile. Mostrare che esiste una funzione non misurabile tale che per ogni α, l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : f(x) = \alpha\}$ è misurabile.*

Esercizio 11 *Sia $\{f_n\}$ una successione (finita o infinita) di funzioni misurabili, e sia $f(x) = \sup_n f_n(x)$. Dimostrare che f è misurabile.*

Esercizio 12 *Sia $\{f_n\}$ una successione (finita o infinita) di funzioni misurabili e supponiamo che $\lim_n f_n(x) = f(x)$ esista per ogni x. Allora la funzione f è misurabile.*

Esercizio 13 *Dimostrare che se f è una funzione misurabile e g è una funzione continua definita su $\mathbb{R}$, allora $g(f(x))$ è misurabile. Mostrare che possono esistere una funzione continua g ed una funzione misurabile h tali che $h(g(x))$ non è misurabile.*

Esercizio 14 *Sia a_n una successione limitata di numeri reali si definisca $\max\lim_n a_n$ come l'estremo inferiore dell'insieme dei numeri che maggiorano definitivamente la successione a_n. Dimostrare che la successione $\sup_{k\geq n} a_k$ è decrescente e che:*

$$\max\lim_n a_n = \lim_n \sup_{k\geq n} a_k.$$

Il numero $\max\lim_n a_n$ così definito si chiama massimo limite della successione a_n.

Esercizio 15 *In analogia a quanto è stato fatto nell'esercizio precedente definire il minimo limite di una successione limitata. Dimostrare che una successione limitata converge se e solo se massimo e minimo limite coincidono.*

Esercizio 16 *Dimostrare che il massimo limite di una successione limitata è il massimo dell'insieme dei limiti di tutte le sottosuccessioni della successione data. In particolare esiste sempre una sottosuccessione che converge al massimo limite.*

Esercizio 17 *Svolgere l'analogo dell'esercizio precedente per il minimo limite.*

Esercizio 18 *Definire, con possibili valori ∞ e $-\infty$ il massimo e minimo limite di una successione non necessariamente limitata. Dimostrare che se massimo e minimo limite coincidono la successione non può essere indeterminata (è convergente o divergente positivamente o negativamente)*

Esercizio 19 *Dimostrare che se $\max\lim_n a_n = +\infty$ allora a_n ammette una sottosuccessione che diverge a $+\infty$. Formulare e dimostrare l'analogo risultato per $\min\lim_n a_n$.*